25. Medzinárodný seminár Výpočtová štatistika 2016
Bratislava 1.-2.12.2016

# *Výpočet a predikcia normálnej dĺžky života*

***Karol Pastor***
KAMŠ FMFI UK UK Bratislava

Motto:

*„Vek nášho žitia je sedemdesiat rokov,*
*a ak sme pri sile, osemdesiat...“*

Žalm 90, 10

## Normálna dĺžka života

je „obvyklá dĺžka života“,

t.j. vek, ktorého sa dožije najviac ľudí (ktorý sa dožijú dospelosti)

t.j. modus funkcie počtu zomrelých (pre $x \geq 10$)

(modal age at death)

## Ako sa počíta?

*Príspevok nadväzuje na ČDK 2015, Relik 2015 (Vlk-Pastor), Langhamrová & al. (2014), Canudas-Romo (2008), ai.*

# Motív v pozadí

Ľudský život sa predlžuje.

Je to vďaka eliminácii ***odvrátiteľných príčin*** *(detská úmrtnosť, choroby, úrazy, ...)* , alebo sa posúva aj ***biologická hranica ľudského života*** ?

(Rektangularizačná hypotéza?)

(Budú sa naše deti bežne dožívať 120 rokov? [SME])

# Podrobné úmrtnostné tabuľky (ŠÚ SR, 2002)

**Podrobné úmrtnostné tabuľky**

Územie: **Slovenská republika** Obdobie: **2001**

**muži**

| Vek | Zomrelí | Žijúci | $q_x$ | $l_x$ | $d_x$ | $L_x$ | $T_x$ | $e_x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 185 | 26946 | 0.006842 | 100000 | 684 | 99384 | 6951310 | 69.51 |
| 1 | 20 | 28006 | 0.000714 | 99316 | 71 | 99280 | 6851926 | 68.99 |
| 2 | 24 | 28696 | 0.000836 | 99245 | 83 | 99203 | 6752646 | 68.04 |
| 3 | 8 | 29351 | 0.000273 | 99162 | 27 | 99148 | 6653442 | 67.10 |
| 4 | 11 | 30313 | 0.000355 | 99135 | 35 | 99117 | 6554294 | 66.11 |
| 5 | 12 | 31065 | 0.000263 | 99100 | 26 | 99087 | 6455177 | 65.14 |
| 6 | 6 | 32382 | 0.000271 | 99074 | 27 | 99060 | 6356090 | 64.16 |
| 7 | 12 | 35373 | 0.000301 | 99047 | 30 | 99032 | 6257030 | 63.17 |
| 8 | 11 | 37375 | 0.000291 | 99017 | 29 | 99003 | 6157998 | 62.19 |
| 9 | 12 | 38521 | 0.000283 | 98988 | 28 | 98974 | 6058995 | 61.21 |
| 10 | 9 | 39967 | 0.000259 | 98960 | 26 | 98947 | 5960021 | 60.23 |
| 11 | 12 | 40430 | 0.000295 | 98935 | 29 | 98920 | 5861073 | 59.24 |
| 12 | 12 | 41102 | 0.000323 | 98905 | 32 | 98889 | 5762153 | 58.26 |
| 13 | 16 | 41834 | 0.000312 | 98874 | 31 | 98858 | 5663264 | 57.28 |
| 14 | 13 | 42900 | 0.000263 | 98843 | 26 | 98830 | 5564406 | 56.30 |
| 15 | 10 | 44616 | 0.000347 | 98817 | 34 | 98800 | 5465576 | 55.31 |
| 16 | 21 | 45250 | 0.000526 | 98782 | 52 | 98756 | 5366777 | 54.33 |
| 17 | 36 | 45415 | 0.000610 | 98730 | 60 | 98700 | 5268020 | 53.36 |

# Symboly v úmrtnostnej tabuľke

Vymieranie hypotetickej populácie v priebehu $\omega$ rokov.

$x$ = vek, $x \geq 0$.

$n$ = dĺžka vekového intervalu ($n$=1 sa nepíše).

$l_x$ = počet osôb dožívajúcich sa veku $x$ rokov.

$l_0$ = počiatočný počet osôb v populácii (koreň tabuľky)

${}_n d_x$ = počet osôb, ktoré zomreli vo veku rokov,

$$ {}_n d_x = l_x - l_{x+n} $$

${}_n q_x$ = pravdepodobnosť úmrtia, t.j. pravdepodobnosť, že osoba presne $x$ -ročná sa nedožije veku $x+n$ rokov,

$$ {}_n q_x = {}_n d_x / l_x $$

$_n p_x$ = pravdepodobnosť dožitia, t.j. pravdepodobnosť, že osoba presne $x$ -ročná sa dožije veku $x + n$ rokov,

$$_n p_x = 1 - _n q_x = l_{x+n} / l_x$$

$_n a_x$ = priemerný počet rokov prežitý vo vekovom intervale $\langle x, x+n)$ osobami, ktoré zomreli v tom intervale

$$(_n a_x \cong n/2 \text{ pre } x \geq 1)$$

$_n L_x$ = celkový počet rokov prežitý osobami vo veku $\langle x, x+n)$
= počet žijúcich vo veku $\langle x, x+n)$

$$_n L_x = n\, l_{x+n} + _n a_x\ _n d_x$$

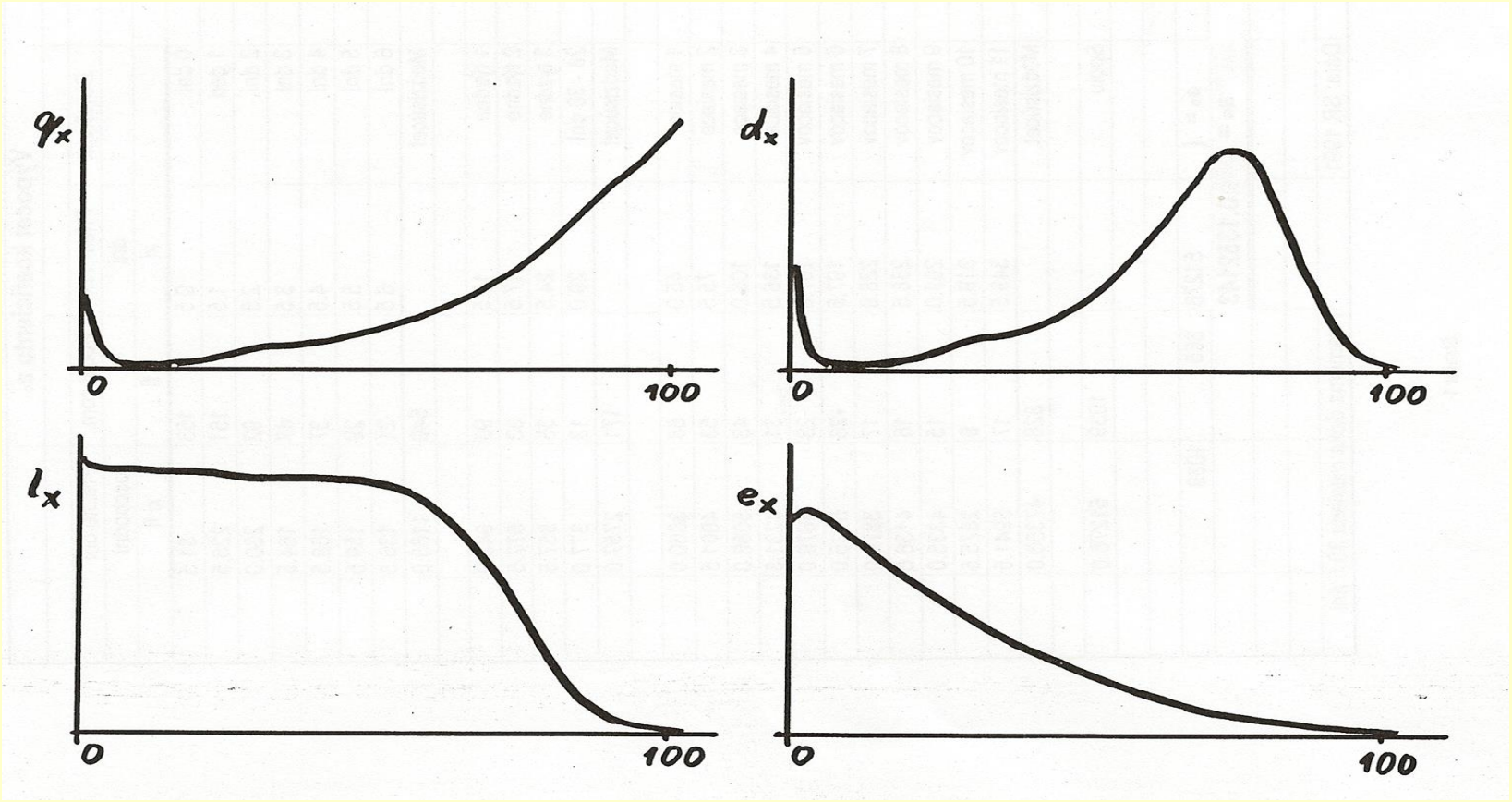
$T_x$ = celkový počet zostávajúcich rokov života všetkých osôb $x$-ročných

$$T_x = \sum_{i=x}^{\omega} L_i$$

$e_x$ = stredná dĺžka (ďalšieho) života osôb vo veku $x$ rokov

$$e_x = T_x / l_x$$

# Typický tvar biometrických funkcií

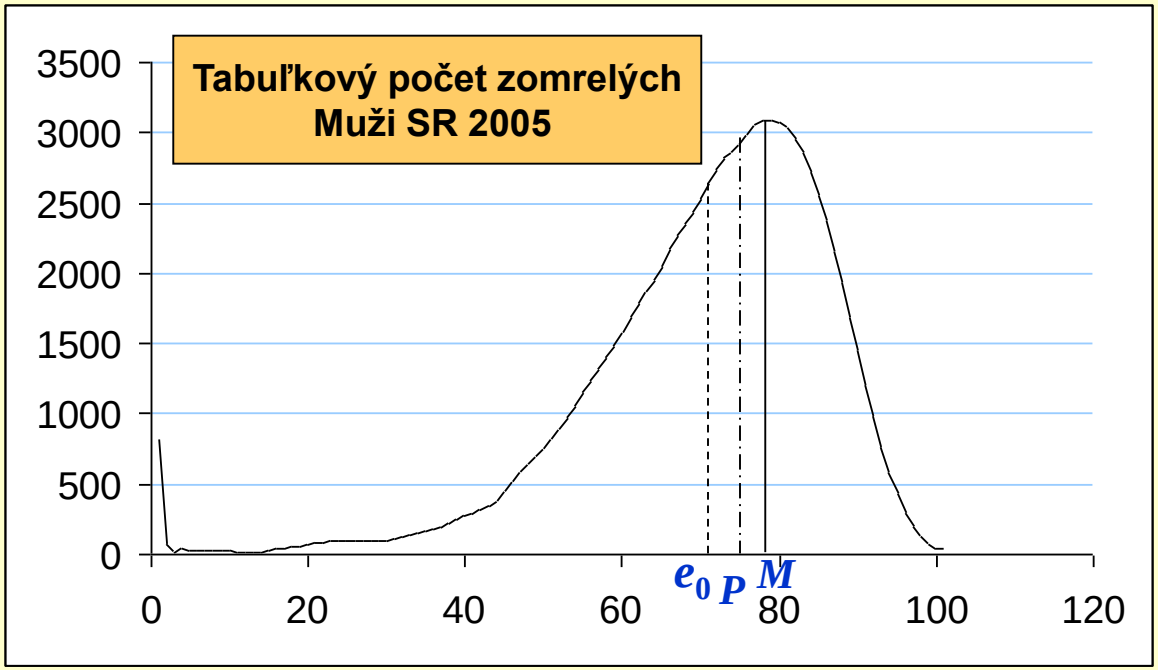


# Indikátory dlhovekosti

**Normálna dĺžka života $M$** $= \arg\max \{d_x \mid x > 10\}$ **(modus)**

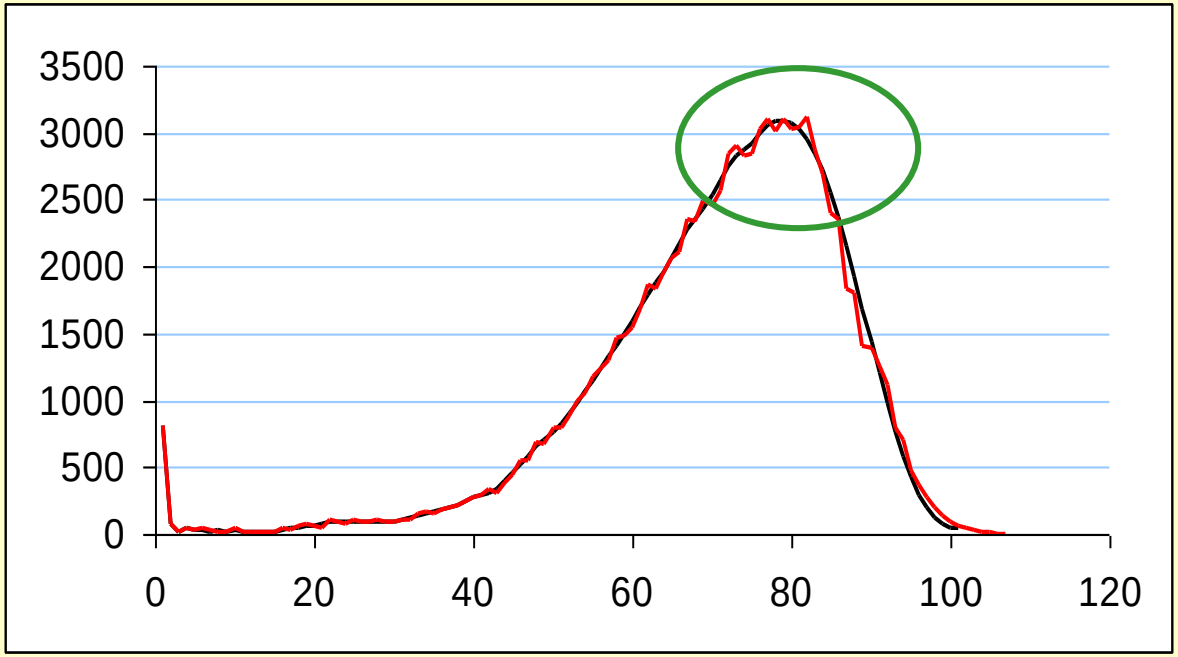
**Stredná dĺžka života pri narodení** $e_0 = T_0 / l_0$ ; $e_{65}$ **...**

**Pravdepodobná dĺžka života** $P$ $(l_P = l_0 / 2$ **medián)**

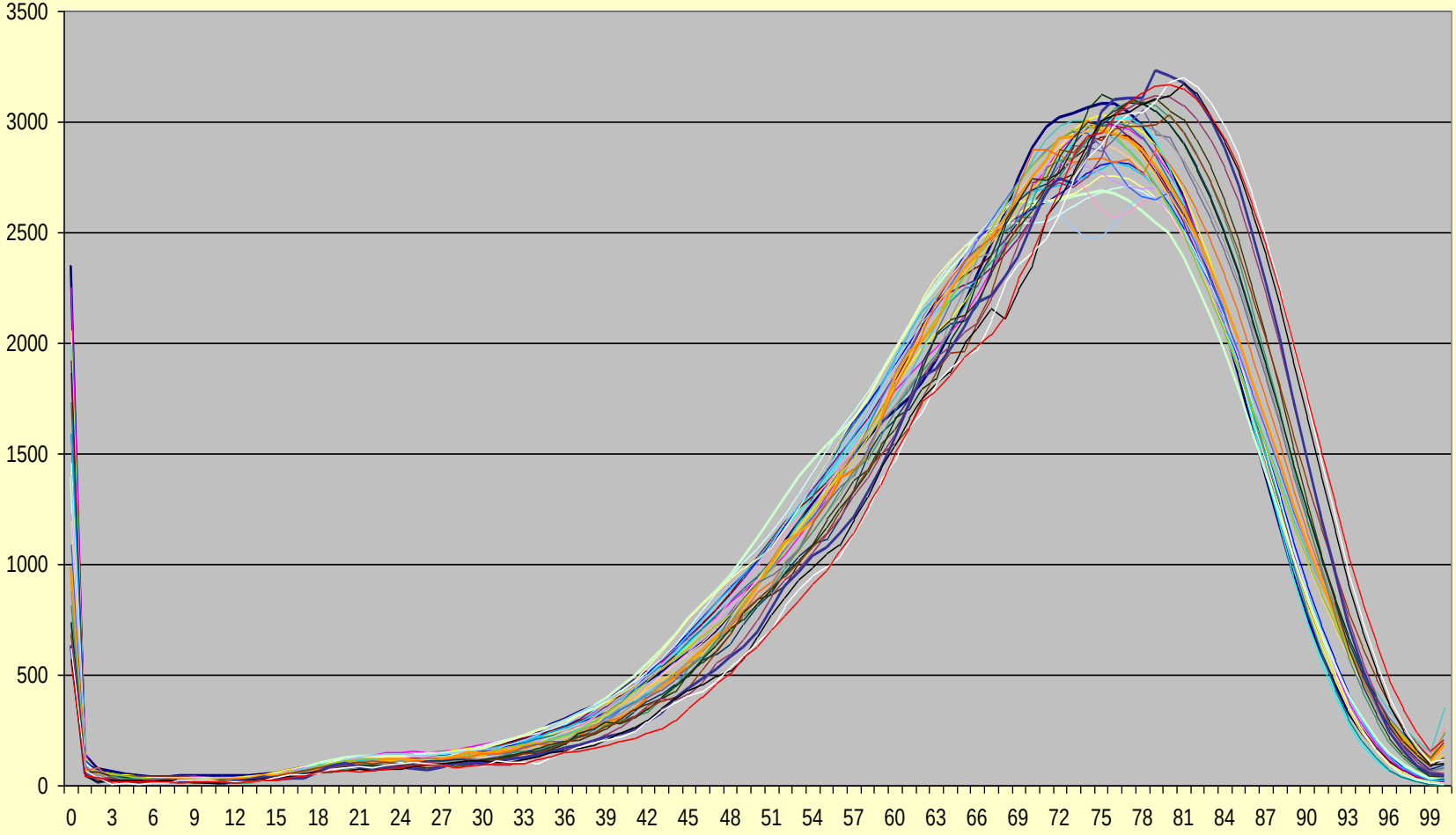


# Výpočet n.d.ž.

- **Jednoduché maximum $d_x$ ?**
- **Vrchol paraboly preloženej 3 bodmi ?**
- **Vrchol paraboly preloženej viacerými bodmi ?**
- **P-splajny [Horiuchi et al. 2013] ... ?**
- **z modelu?**

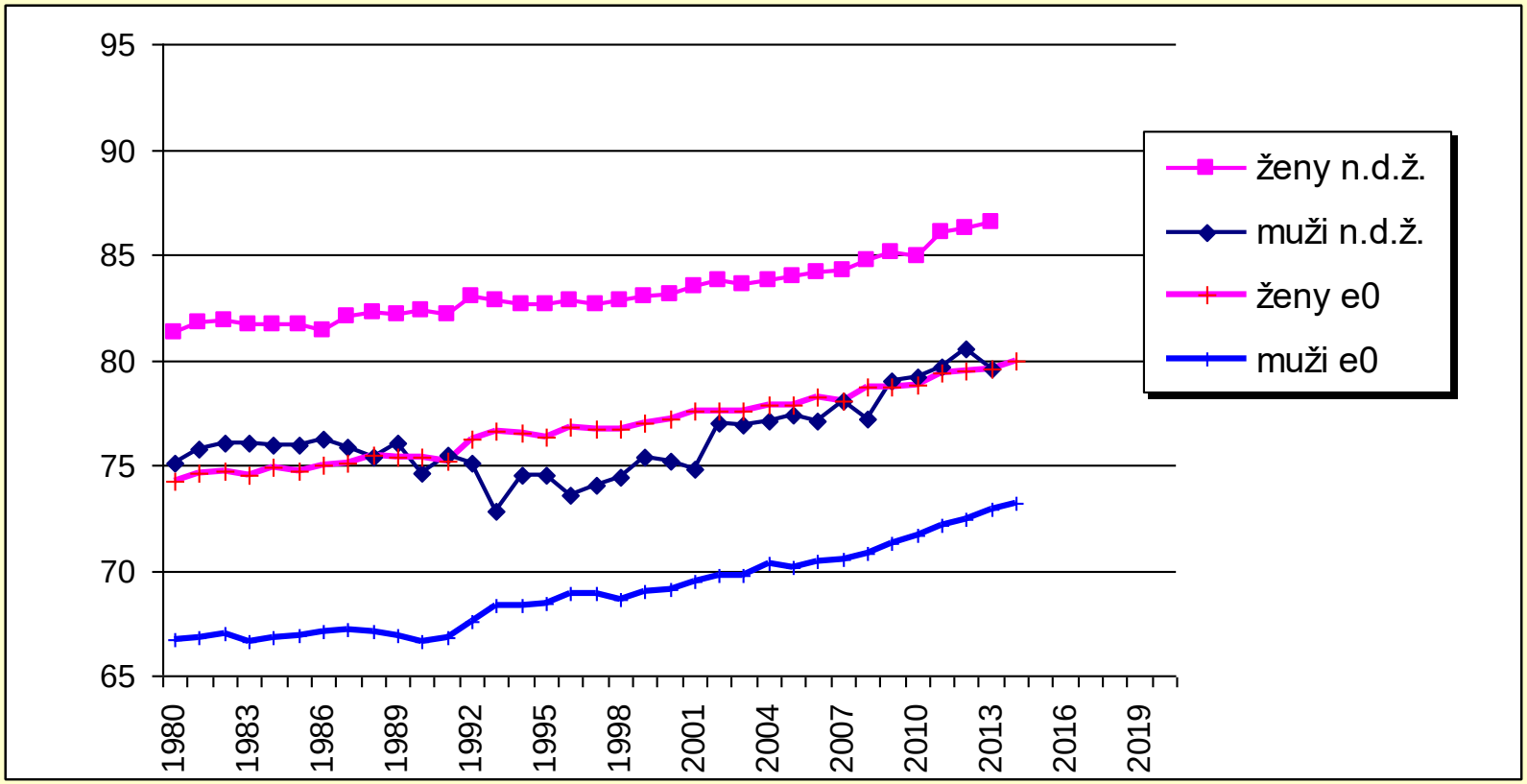


## Počet zomrelých vo veku x, muži SR 1980-2013



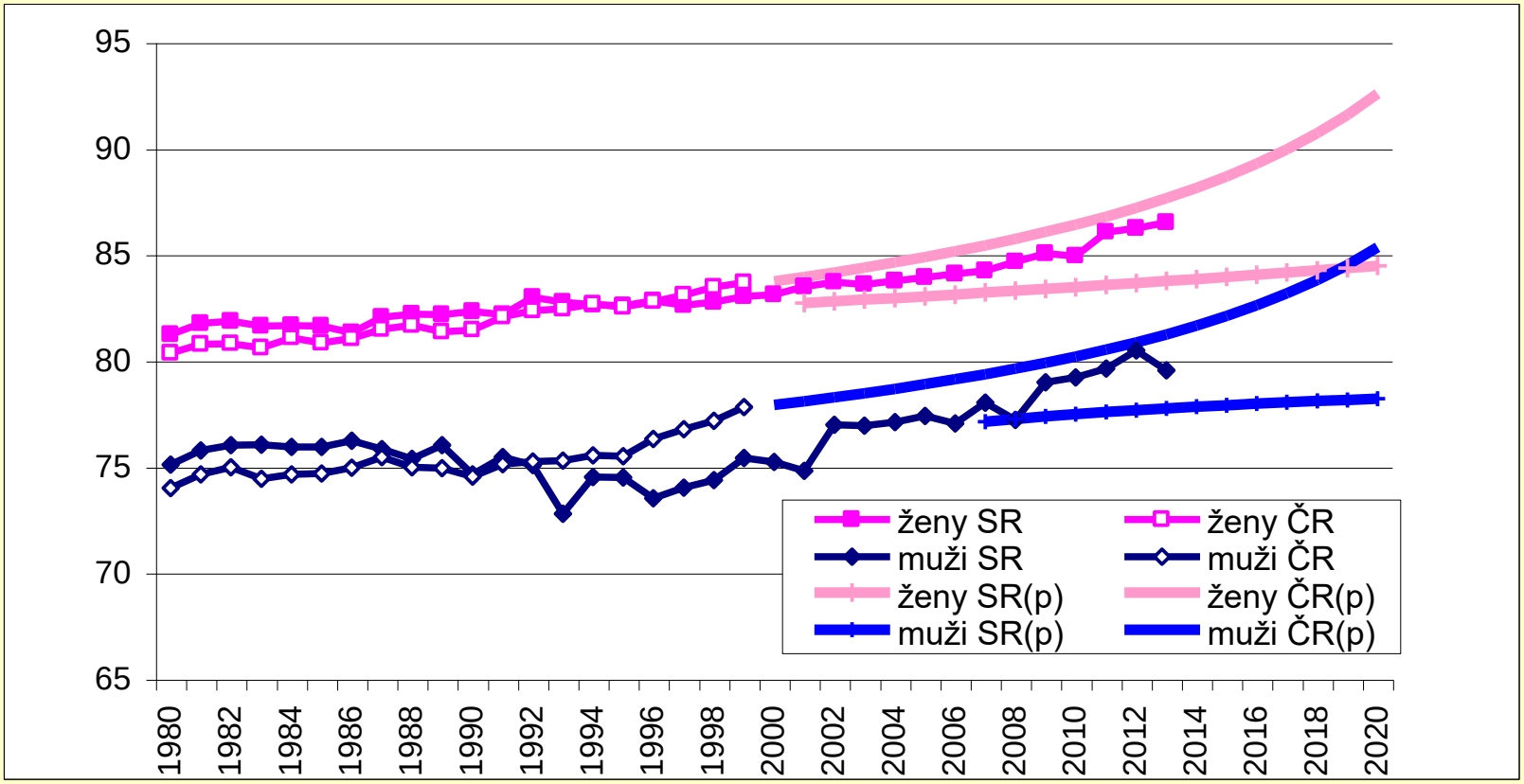

Dáta: http://www.infostat.sk/vdc/sk/

# Vývoj normálnej dĺžky života a strednej dĺžky života pri narodení v SR



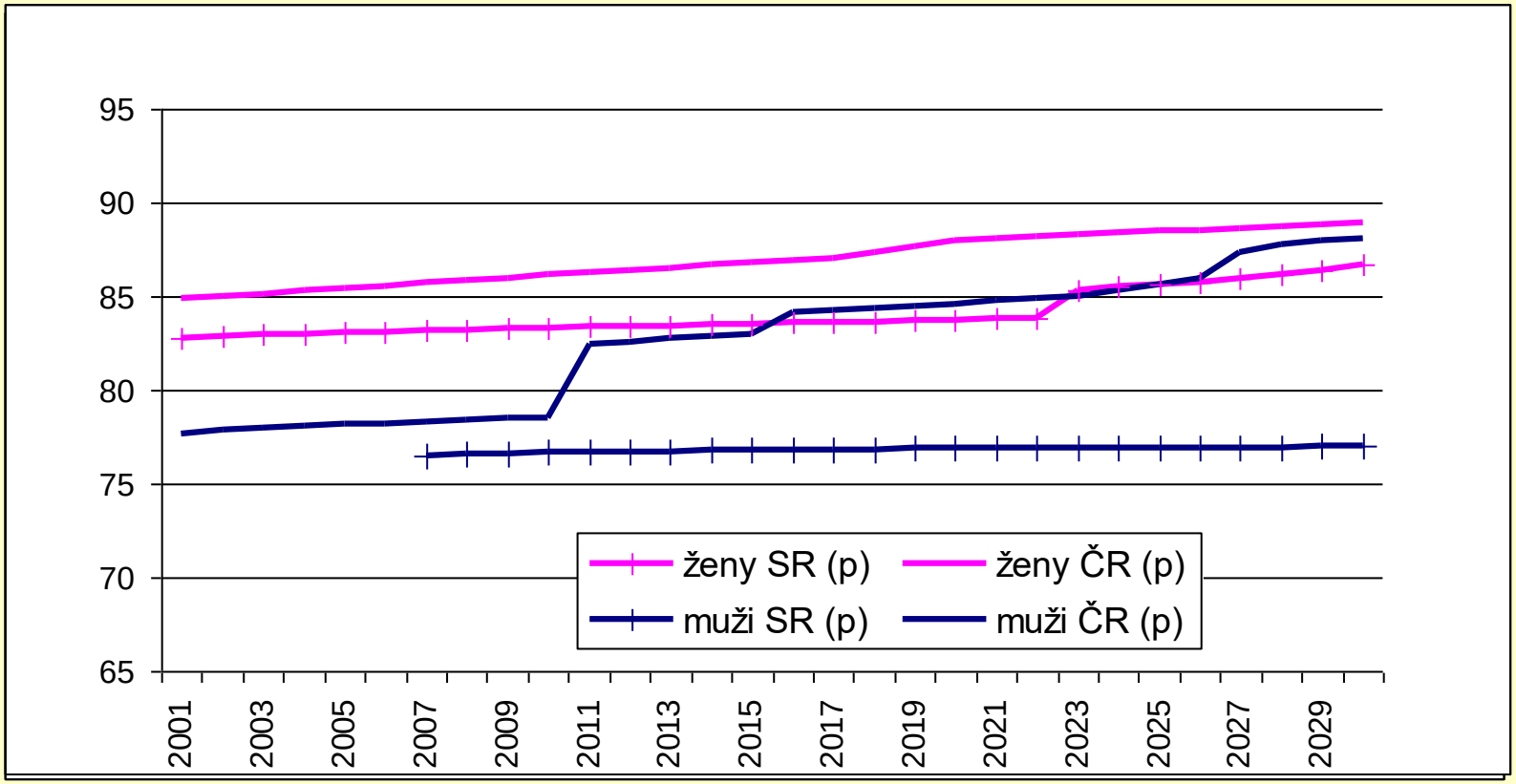

Zdroj: http://www.infostat.sk/slovakpopin/data/mortality.xls
a vlastné výpočty

# Normálna dĺžka života mužov a žien v SR a ČR, odhady a predikcie (p).



# Predikcie normálnej dĺžky života v SR a ČR,

## modus ako vrchol paraboly cez 3 body



# Normálna dĺžka života – modely

*Intenzita úmrtnosti* $\mu(x) = -\frac{1}{l(x)}\frac{dl(x)}{dx}$

*Rozdelenie úmrtnosti podľa veku* $d(x) = \mu(x)\, l(x)$,

*Normálna dĺžka života* $M$ = modus funkcie $d(x)$ (*modal age at death*) (pre $x > 10$)

N.P. pre maximum: $\frac{d}{dx}d(x) = 0 \Leftrightarrow \mu'(x) = [\mu(x)]^2$

(napr. Canudas-Romo 2008)

# Normálna dĺžka života – modely

*Intenzita úmrtnosti* $\mu(x) = -\frac{1}{l(x)}\frac{dl(x)}{dx}$

*Rozdelenie úmrtnosti podľa veku* $d(x) = \mu(x)\, l(x)$,

*Normálna dĺžka života* $M$ = modus funkcie $d(x)$ (*modal age at death*) (pre $x > 10$)

N.P. pre maximum: $\frac{d}{dx}d(x) = 0 \Leftrightarrow \mu'(x) = [\mu(x)]^2$

(napr. Canudas-Romo 2008)

# Normálna dĺžka života – Gompertz

*Gompertz*

*Intenzita úmrtnosti* $\mu(x) = B\,C^x = e^{b+cx}$

$B \sim 0{,}0005;\ C \sim 1{,}05$ ; kde $b = \ln B$, $c = \ln C$

$\Rightarrow$ *Normálna dĺžka života* $M = \ln[(\ln C)/B]/\ln C$ ,

*Gompertz – Makeham*

$$\mu(x) = A + B\,C^x$$

$\Rightarrow$ *Normálna dĺžka života*

$$M = \frac{\ln \frac{\ln C - 2A + \sqrt{(lnC - 4A)\cdot \ln C}}{2B}}{\ln C}$$

# Normálna dĺžka života – Lee-Carter

*Gompertz – dynamický model (rovnomerná zmena)*

$$\mu(x, t) = B(t)\, C^{x} = Be^{-rt}\, e^{cx} = e^{b - rt + cx}$$

$M(t) = M + rt/c$ ... lineárne rastie.

*Lee-Carter (nerovnomerná zmena) (LCM, 1992)*

$$\mu(x, t) = e^{\alpha(x) + \beta(x)\, k(t)}.$$

Ak $k(t) \equiv 0$ a naviac $\alpha(x) = b + c\,x = \ln B + x \ln C$,

$\Rightarrow$ L-C sa zmení na statický Gompertzov model

Ak $k(t) = \lambda - t$ a $\mu(x, t)\, e^{-\beta(x)}$

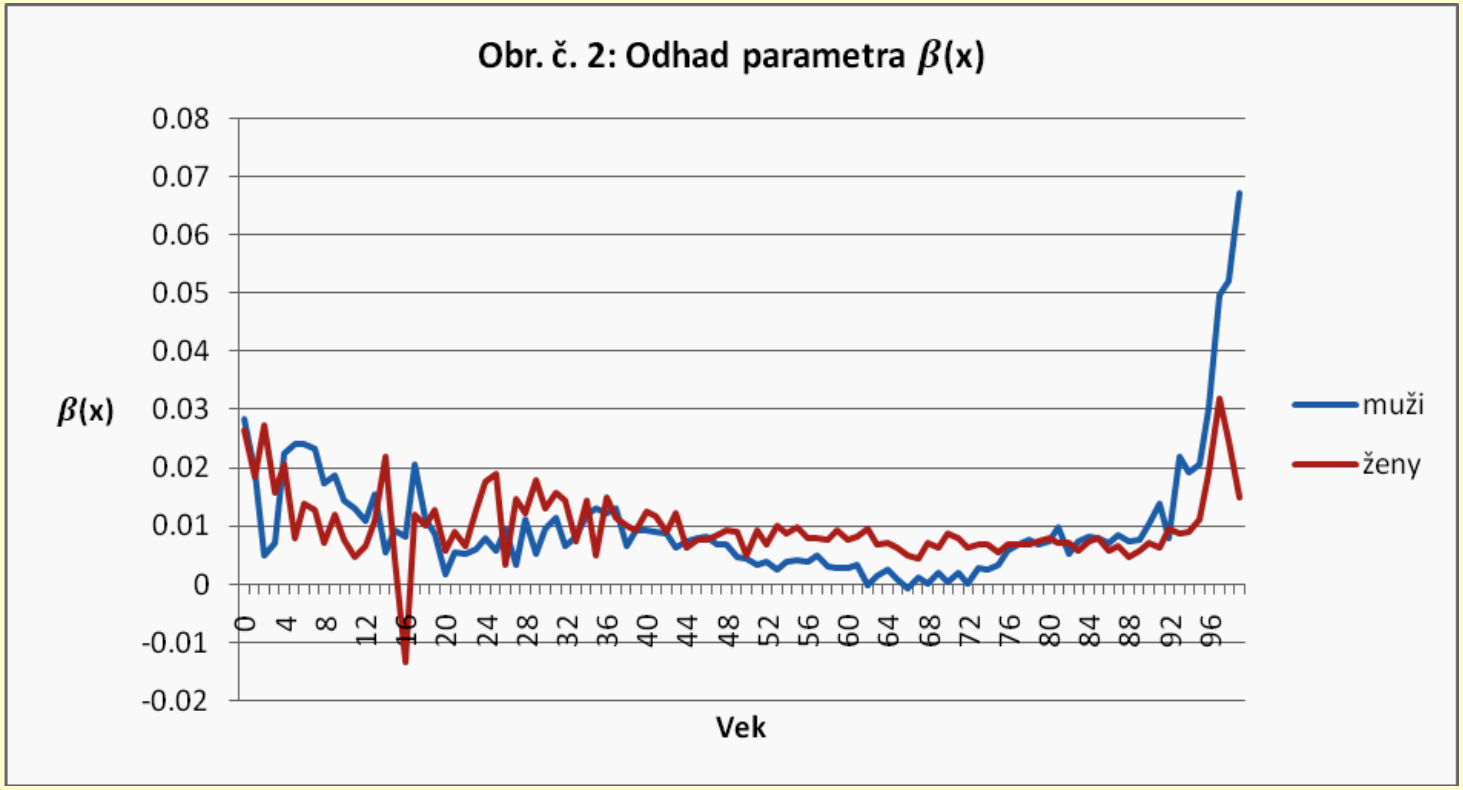
$\Rightarrow$ $\mu(x, t+1) = \mu(x, t)\, e^{-\beta(x)}$,

Ak naviac $\beta(x) = r$ $\Rightarrow$ L-C sa zmení na dyn. Gompertz. m.

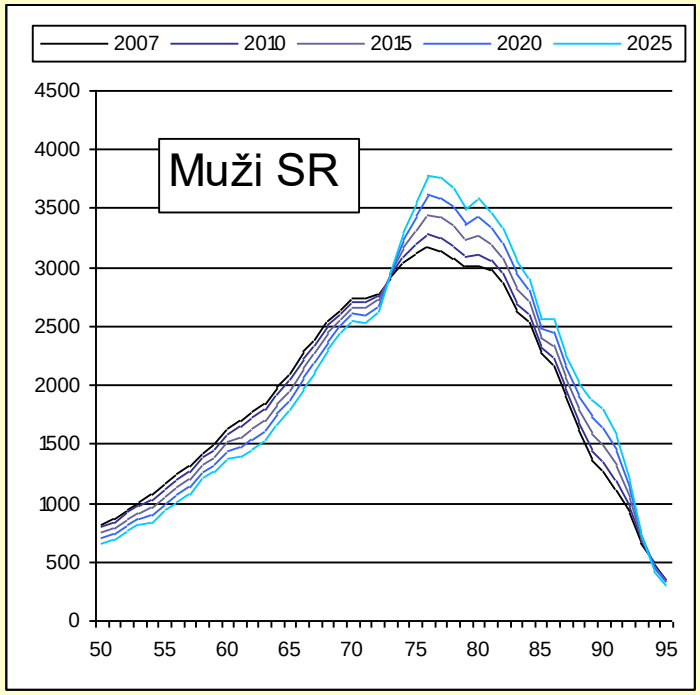
# Identifikácia parametrov v LCM - $\beta_x$

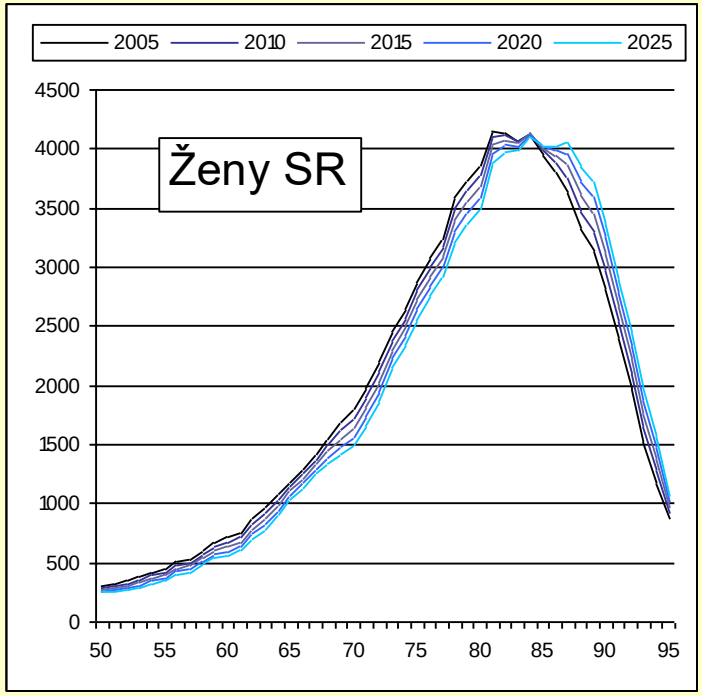
SR, Slovak POPIN, 1980-2000

Podmieky: $\sum_{x=x_1}^{x_n} \beta_x = 1, \quad \sum_{t=t_1}^{t_m} k_t = 0.$

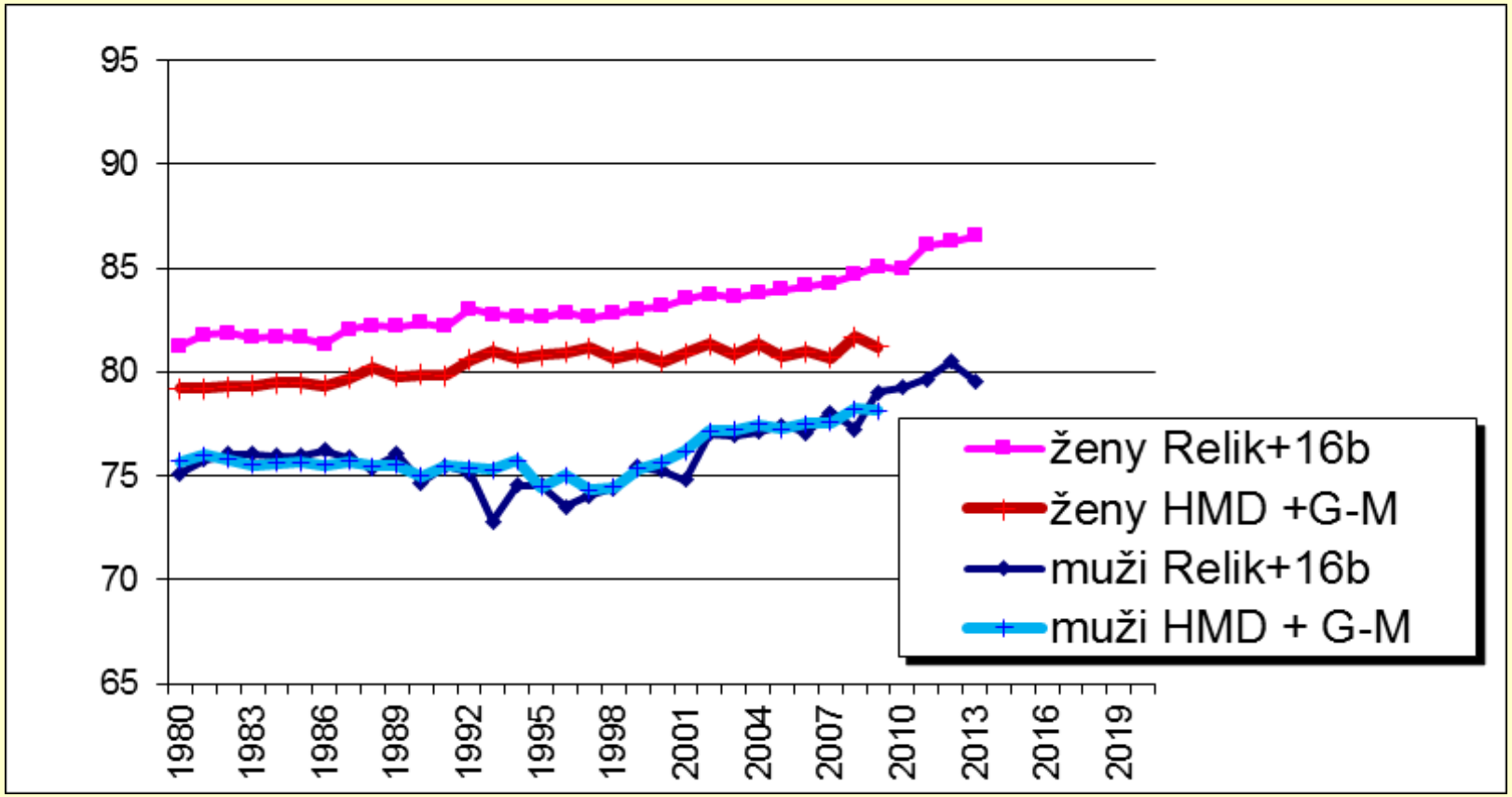


# Priebeh funkcie $d_{x,t}$ , predikcie vo vybraných rokoch, muži a ženy SR.



# Vývoj normálnej dĺžky života v SR - rôzne metódy




Zdroj: www.infostat.sk/slovakpopin/ , www.mortality.org a vlastné výpočty

***Ďakujem za pozornosť***
***a dovidenia na VS 2017 !***